

幾何学・演習問題 No.2

1. 曲線 $\vec{p} = (x(t), y(t))$ の曲率の公式を導きなさい。

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

2. 曲線 $y = f(x)$ の曲率の公式を導きなさい。ただし、向きは x が大きくなる方向、すなわち左から右へ向かうものとします。

$$\kappa(x) = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

3. 次の曲線の曲率を計算しなさい。曲線の向きは適当に選んで下さい。

(1) 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(2) 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

4. 以下の曲線に対して、各点における曲率を計算しなさい。また、曲率の絶対値が最大になる x を求めなさい。

(1) 放物線 $y = x^2$

(2) 3次曲線 $y = x^3 - x$

(3) 懸垂線 $y = \cosh x$

(4) 指数関数 $y = e^x$ のグラフ

5. 空間曲線 $\vec{p} = \vec{p}(t)$ の各点における曲率と捩率の公式を導きなさい。

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{p}}(t) \times \ddot{\vec{p}}(t)|}{|\dot{\vec{p}}(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\dot{\vec{p}}(t), \ddot{\vec{p}}(t), \dddot{\vec{p}}(t))}{|\dot{\vec{p}}(t) \times \ddot{\vec{p}}(t)|^2}$$

6. つるまき線 $\vec{p} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ の曲率と捩率を上の公式を用いて計算しなさい。

7. 次の方程式で表される曲面を図示しなさい。またパラメータ表示を見つけなさい (図形の一部でもかまいません)。ただし a, b, c は正の定数とします。

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(4) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(z^2 - x^2 - y^2) = 0$