数学要論 I・数学要論演習 I No.2

1. 次の集合の最大値、最小値、上限、および下限があれば、その値を求めなさい。
   (1) $\mathbf{N}$　(2) $\mathbf{Z}$　(3) $\left\{ \dfrac{1}{x} \;\middle|\; x > 0 \right\}$　(4) $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leq 2\}$
   (5) $(0, \infty)$　(6) $\left\{ \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}$　(7) $\left\{ \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{0\}$
   (8) $\left\{ \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbf{N} \right\}$　(9) $\left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}$
   (10) $\left\{ 1 - \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}$　(11) $\left\{ (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n} \right) \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}$

2. 数列 $\left\{ \dfrac{1}{n^2} \right\}$ は 0 に収束することを証明しなさい。

3. 数列 $\{n\}$ は収束しないことを証明しなさい。

4. 数列 $\{(-1)^n\}$ は収束しないことを証明しなさい。

5. $a_n \to a$ とします。数列 b_n を $b_n = a_{2n}$ で定めるとき、$b_n \to a$ であることを証明しなさい。

6. 数列 a_n と b_n が共通の極限 a に収束するとし、数列 c_n を

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ \ldots$$

   のように両者を交互に並べて定義します。このとき、$c_n \to a$ を示しなさい。

7. 数列 $\{a_n\}$ が a と b を極限に持てば, $a = b$ であることを示しなさい。

オマケの問題

8. 数列 $\left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n \right\}$ は収束することを証明しなさい。

9. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$ を証明しなさい。