数学要論 I・数学要論演習 I No.3

1. 写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ が与えられているとき、次の問に答えなさい。
   (1) 任意の部分集合 $A \subset X$ に対し、$(g \circ f)(A) = g(f(A))$ が成りたつことを示しなさい。
   (2) 任意の部分集合 $C \subset Z$ に対し、$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ が成りたつことを示しなさい。

2. f は関数 $f: X \to Y$ を表し、A, A' は X の部分集合、B, B' は Y の部分集合とします。以下のことを示しなさい。
   (1) $A \subset A' \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subset f(A')$
   (2) $B \subset B' \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$
   (3) $f(A' - A) \supset f(A') - f(A)$
   (4) $f^{-1}(B' - B) = f^{-1}(B') - f^{-1}(B)$
   ※ ここで使われている「$-$」は教科書 p.9 で説明されている**差集合**を与える集合演算です。

3. 次式で与えた写像 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は単射ですか？　全射ですか？　全単射ですか？
   (1) $f(x) = x - 2$　　(2) $f(x) = x^2$　　(3) $f(x) = x^3$　　(4) $f(x) = x^3 - x$

4. $A \subset X$ のとき $i_A(a) = a$ $(a \in A)$ で定義される写像 $i_A: A \to X$ は必ず単射であることを示しなさい。この写像は**包含写像**とよばれます。特に $A = X$ のとき、この写像は $1_X: X \to X$ と書かれ X の上の**恒等写像**とよばれます。1_X は全単射であることを示しなさい。

5. 写像 $f: X \to Y$ と部分集合 $A \subset X$ が与えられているとき、A から Y への写像 $f|A: A \to Y$ を $(f|A)(a) = f(a)$ $(a \in A)$ と定めます。この写像のことを f の A への**制限**といいます。$f|A = f \circ i_A$ が成りたつことを示しなさい。ただし i_A は包含写像です。

6. 次のおのおのを証明しなさい。
   (1) 単射 $f: X \to Y$ と単射 $g: Y \to Z$ の合成 $g \circ f: X \to Z$ は単射である。
   (2) 全射 $f: X \to Y$ と全射 $g: Y \to Z$ の合成 $g \circ f: X \to Z$ は全射である。
   (3) 全単射 $f: X \to Y$ と全単射 $g: Y \to Z$ の合成 $g \circ f: X \to Z$ は全単射である。またこのとき $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ である。

7. $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N} \cup \{0\}$ への全単射をひとつ作りなさい。その逆写像も求めなさい。

8. $\mathbf{N}$ から $2\mathbf{N} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ への全単射をひとつ作りなさい。その逆写像も求めなさい。

9. 閉区間 $[0, 1]$ から半開区間 $(0, 1]$ への全単射をひとつ作りなさい。その逆写像も求めなさい。