数学要論 II 模擬試験（実際の分量はこんなにありません！　完備性は試験範囲からはずします。）

[1] 以下の問いに答えなさい。

(1) 集合 X の上の距離関数 d とはどのようなものか、説明しなさい。

(2) $d(x,y)=(x-y)^2$ で定まる写像 $d:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ の上の距離関数ですか。理由をつけて答えなさい。

(3) 集合 X の上の位相 $\mathcal{O}$ とはどのようなものですか。説明しなさい。

(4) 距離空間 (X,d) において、点 $x\in X$ が部分集合 $A\subset X$ の内点であるとはどういうことですか。説明しなさい。

(5) 距離空間 (X,d) において、部分集合 $A\subset X$ の閉包 A^a とはどういうものですか。説明しなさい。

(6) ふたつの距離空間 (X,d_X), (Y,d_Y) が与えられたとき、写像 $f:X\to Y$ が連続であるとはどういうことですか。説明しなさい。

(7) 距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n\}$ が点 $x\in X$ に収束するとはどういうことですか。説明しなさい。

[2] 次式で定められる $\mathbf{R}^2=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}$ 上の距離関数 d に関して以下の問いに答えなさい。

$$d((x,y),(x',y'))=|x-x'|+|y-y'|$$

(1) $a=(1,0)$, $b=(0,2)$ とするとき $d(a,b)$ を計算しなさい。

(2) 距離空間 $(\mathbf{R}^2,d)$ における $N((1,0);2)$ を図示しなさい。

[3] ユークリッド平面 $(\mathbf{R}^2,d)$ の部分集合 $A=\{\ (x,y)\mid x^2+y^2<16$ かつ $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0\ \}$ について、以下の問いに答えなさい。

(1) この図形を描きなさい。

(2) 点 $p=(3,3)$ は A の内点・外点・境界点のどれですか。理由をつけて答えなさい。

(3) 点 $q=(2,2)$ は A の内点・外点・境界点のどれですか。理由をつけて答えなさい。

[4] ユークリッド平面 $(\mathbf{R}^2,d)$ の点列 $\{(x_n,y_n)\}$ が点 (x,y) に収束するならば、数列 $\{x_n\}$ は x に収束することを証明しなさい。

[5] d_D を $\mathbf{R}^2$ の上の離散距離関数とします。すなわち、$x=y$ ならば、$d_D(x,y)=0$、$x\neq y$ ならば $d_D(x,y)=1$ とします。$(\mathbf{R}^2,d_D)$ の点列 $\{x_n\}$ を $x_n=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ で定めるとき、$\{x_n\}$ はどの点にも収束しないことを証明しなさい。

[6] 距離空間 (X,d) の部分集合 A に対して、$A\subset A^{ai}$ は必ず成り立ちますか。そうならば、証明を与え、そうでなければ、反例を示しなさい。

[7] (X,d_X), (Y,d_Y) は距離空間とし、$f:X\to Y$ は連続とします。このとき、任意の部分集合 $A\subset X$ に対して $f(A^a)\subset f(A)^a$ が成り立つことを証明しなさい。

[8] (X,d) は距離空間とします。部分集合 F が閉集合であるとは、どういうことですか。説明しなさい。またふたつの部分集合 A, F の間に $A\subset F$ という関係があり、さらに F が閉集合であるならば、$A^a\subset F$ が成り立つことを証明しなさい。

略解

[1] (1) 次の3条件を満たす関数 $d: X \times X \to \mathbf{R}$ のこと：

1. $d(x,y) \geqq 0$ かつ「$d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$」
2. $d(x,y)=d(y,x)$
3. $d(x,z) \leqq d(x,y)+d(y,z)$

(2) $x=1,\ y=2,\ z=3$ とすると、$d(x,z)=4,\ d(x,y)+d(y,z)=1+1=2$ で三角不等式（上の3）が成り立たないので、距離関数ではない。

(3) X の部分集合の作る集合で次の3条件をみたすもののこと：

1. $\phi \in \mathcal{O},\ X \in \mathcal{O}$
2. $O_1,\ \ldots,\ O_n \in \mathcal{O} \Longrightarrow O_1 \cap \ldots \cap O_n \in \mathcal{O}$
3. $O_\lambda \in \mathcal{O}\ (\forall \lambda \in \Lambda) \Longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

(4) $N(x;\varepsilon) \subset A$ を満たす $\varepsilon > 0$ が存在すること。「$\exists \varepsilon > 0 (N(x;\varepsilon) \subset A)$」のように書いても OK。

(5) 次のどれでも OK：

- $A^i \cup A^f$
- A^{ec}
- A の点列の極限となる点全体
- A を包む閉集合で最小のもの　　＊ [**8**] 参照！

(6) 次のどれでも OK：

- X の各点で連続であること
- $x_n \to x$ ならば $f(x_n) \to f(x)$ が必ず成り立つこと
- (Y, d_Y) の任意の開集合 V に対して、$f^{-1}(V)$ が (X, d_X) の開集合であること。
- (Y, d_Y) の任意の閉集合 G に対して、$f^{-1}(G)$ が (X, d_X) の閉集合であること。
- 任意の部分集合 A に対し、$f(A^a) \subset f(A)^a$ が成り立つこと　　＊ [**7**] 参照

(7) 次のどれでも OK：

- $d(x_n, x) \to 0$
- $\forall \varepsilon > 0 (\exists N \in \mathbf{N} (\forall n \in \mathbf{N} (n \geqq N \Longrightarrow x_n \in N(x;\varepsilon))))$
- $\forall \varepsilon > 0 (\exists N (n \geqq N \Longrightarrow x_n \in N(x;\varepsilon)))$　　＊上の省略形

[2] (1) $d(a,b) = |1-0| + |0-2| = 3$

(2) 略

[3] (1) 略（原点を中心とし半径4の円板の第一象限の部分。ただし境界のうち弧の部分は除く）

(2) 外点である。$\varepsilon = 3\sqrt{2} - 4$ とおくと、$\varepsilon > 0$ および $N(p;\varepsilon) \cap A = \phi$ が成り立つ。

(3) 内点である。$\varepsilon = 4 - 2\sqrt{2}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ および $N(q;\varepsilon) \subset A$ が成り立つ。

[4] 仮定より $d((x_n, y_n), (x, y)) \to 0$ である。一方、$|x_n - x| \leqq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = d((x_n, y_n), (x, y))$ であるから、$|x_n - x| \to 0$。よって $x_n \to x$ である。

[5] $\mathbf{R}^2$ の点 x を任意にとる。$\{x_n\}$ が x に収束しないことを証明しよう。背理法による。
仮に、$x_n \to x$ とする。収束の定義により $\varepsilon = 1$ に対して、次のような $N \in \mathbf{N}$ が存在する：$n \geqq N \Longrightarrow d_D(x_n, x) < 1$。$d_D$ の値は 0 か 1 しかないので、$n \geqq N \Longrightarrow d_D(x_n, x) = 0$ である。つまり、$n \geqq N \Longrightarrow x_n = x$ である。特に、$x_N = x_{N+1}$ が成り立つ。これは $\frac{1}{N} = \frac{1}{N+1}$ つまり $N = N + 1$ を意味するので不合理。以上より、収束しないことがわかる。

[6] 必ずしも成り立たない。例えばユークリッド直線で $A = (1, 2]$ とおくと、$A^a = [1, 2]$ なので、$A^{ai} = (1, 2)$ となり、成り立たない。
※反例は上のように具体的に示さなければいけません。

[7] $y \in f(A^a)$ を任意にとると、$\exists x \in A^a$ $(y = f(x)$ となる。従って、$\exists a_n \in A$ $(a_n \to x)$ である。f は連続であるから、$f(a_n) \to f(x)$ であるが、$f(a_n) \in f(A)$ なので、$f(x) \in f(A)^a$ がわかる。
※ここで、「$x \in A^a \Longleftrightarrow \exists a_n \in A(a_n \to x)$」を 2 回使っています。別証明は教科書の例題 **9.1**(p.65) にあります。

[8] F が (X, d) の閉集合であるとは、$F^a = F$ がなりたつことをいいます。
もし $A \subset F$ が成り立つならば、両辺の閉包をとって、$A^a \subset F^a$ が得られる。しかし、F は閉集合なので $F^a = F$ なので、$A^a \subset F$ となる。
※これは今日の小テストの問題でした。これは教科書 p.63 の問 4 の一部です。解説は p.136 に載っています。