Homeomorphism and diffeomorphism groups of non-compact manifolds with the Whitney topology

矢ヶ崎 達彦 (Tatsuhiko Yagasaki)

京都工芸繊維大学 工芸科学研究科

(Kyoto Institute of Technology)

非コンパクト多様体の同相群・微分同相群は，二つの典型的な位相を持つ．１つはコンパクト - 開 (C^∞) 位相，もう一つは Whitney (C^∞) 位相である．この論説では，共著論文 [2] において得られた非コンパクト多様体の同相群の Whitney 位相 及び 非コンパクト C^∞ 多様体の微分同相群の Whitney C^∞ 位相の局所位相型に関する結果の概要を解説する．

Whitney 位相には Box 積が密接に関連する．まず第 1 節では，この Box 積の基本的な性質を説明する．この準備のもとに，第 2 節，第 3 節において同相群・微分同相群に関する主要結果を概説する．最後の第 4 節では，微分同相群の場合に主要結果の証明に関して概説する．

1. Box 積 及び Small Box 積

コンパクト - 開 位相には，通常の Tychonoff 積が対応するが，Whitney 位相には Box 積が対応する．この節では，Box 積の基本的な性質を説明する．以下では，主に添字集合が非負整数の集合 ω の場合を考える．

定義 1. (1) 位相空間の列 $(X_n)_{n\in\omega}$ に対して，その Box 積 $\square_{n\in\omega}X_n$ は，積 $\prod_{n\in\omega} X_n$ に Box 位相 を与えたものである．ここで，Box 位相は，次の形の部分集合全体を基底とする位相である: $\prod_{n\in\omega} U_n$ (U_n は X_n の開集合)

(2) 基点付き位相空間の列 $(X_n, *_n)_{n\in\omega}$ に対して，Small Box 積 $(\boxdot_n X_n, (*_n)_n)$ は 次の形の点全体から成る Box 積 $\square_{n\in\omega}X_n$ の部分空間である:

$$(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k,\ *_{k+1},\ *_{k+2},\ \ldots).$$

Small Box 積は，有限積の単調増加列の和として 次の様に表す事が出来る:

$$\boxdot_{n\in\omega} X_n = \bigcup_{n\in\omega} \left(\prod_{i\leq n} X_i\right).$$

以下では，Box 積と Small Box 積を組で考える事が多いので，しばしば 次のような略記号を用いる: $(\square, \boxdot)_n X_n = (\square_n X_n, \boxdot_n X_n)$, $(\square, \boxdot)^\omega X = (\square, \boxdot)_{n\in\omega} X$.

例 1. 基本的な例は，l_2 の Box - Small Box 積 $(\square, \boxdot)^\omega l_2$ である．Box 積は，その位相が細かすぎ，$\square^\omega l_2$ は局所連結でも正規でも無い．一方，P. Mankiewicz [13] による LF 空間

(Fréchet 空間の順極限) の分類に基づいて，$\boxdot^{\omega} l_2 \approx l_2 \times \mathbb{R}^\infty$ である事が知られている．但し，$\mathbb{R}^\infty$ は，列 $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \cdots$ の順極限を表す．

Small Box 積のパラコンパクト性に関しては，次が成り立つ [2, Proposition 2.2].

命題 1. 各 $n \in \omega$ に対して $\prod_{i \le n} X_i$ がパラコンパクトならば，Small Box 積 $\boxdot_{n\in\omega} X_n$ もパラコンパクトになる．

Tychonoff 積の場合と同様に，連続写像の列 $f^n : X_n \to Y_n$ $(n \in \omega)$ は，Box 積の連続写像

$$\square_n f^n : \square_n X_n \to \square_n Y_n : \quad (x_n)_n \mapsto (f^n(x_n))_n$$

を定める．また，基点を保つ連続写像の列 $f^n : (X_n, *_n) \to (Y_n, *_n)$ $(n \in \omega)$ は，$\square_n f^n$ の制限として Small Box 積の写像 $\boxdot_n f^n : \boxdot_n X_n \to \boxdot_n Y_n$ を定める．注意が必要なのは，ホモトピーの列の Box 積である．すなわち，基点を保つホモトピーの列 $f_t^n : (X_n, *_n) \to (Y_n, *_n)$ $(n \in \omega)$ の Small Box 積 $\boxdot_n f_t^n : \boxdot_n X_n \to \boxdot_n Y_n$ は基点を保つホモトピーを定めるが，Box 積 $\square_n f_t^n : \square_n X_n \to \square_n Y_n$ 自体は連続ホモトピーとはならない．

次に位相群の Box - Small Box 積について考察する ([2, Section 2])．位相群の列 $(G_n)_{n\in\omega}$ の Box 積 $\square_n G_n$ は座標ごとの積で自然に位相群になり，Small Box 積 $\boxdot_n (G_n, e_n)$ はその部分位相群になる．但し，位相群に対しては，常に単位元を基点にとる．

G を単位元 e を持つ位相群とし，$(G_n)_{n\in\omega}$ は G の部分群の列で次の条件を満たすとする:

$$G_n \subset G_{n+1} \ (n \in \omega), \quad G = \bigcup_n G_n.$$

このとき，積写像 $p : \boxdot_n G_n \to G$ が次式で定義される:

$$p(x_0, x_1, \ldots, x_k, e, e, \ldots) = x_0 \, x_1 \cdots x_k$$

命題 2. 積写像 p は次の性質を持つ:

(1) p は連続全射である．

(2) もし p が (基点 $(e)_n$ で) 開写像ならば，G は位相群の列 $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \cdots$ の位相群の圏における順極限になる．(これを 記号 $G = \text{g-}\varinjlim_n G_n$ で表す．)

(3) もし p が e で 局所セクションを持てば，次が成り立つ:

(i) 各 G_n が局所可縮ならば，G も局所可縮.

(ii) G の部分群 H が次の条件を満たせば，H は G においてホモトピー稠密になる:
各 $n \in \omega$ について $H \cap G_n$ は G_n においてホモトピー稠密で，G はパラコンパクト

ここで，位相空間 X の部分空間 A が X で ホモトピー稠密であるとは，X 上のホモトピー $\varphi_t : X \to X$ $(0 \le t \le 1)$ で $\varphi_0 = \mathrm{id}_X$ かつ $\varphi_t(X) \subset A$ $(0 < t \le 1)$ を満たすものが存在することである．

2. Whitney 位相を持つ多様体の同相群

この節では，Whitney 位相を持つ非コンパクト多様体の同相群の位相的性質を概説する．M を連結 σ-コンパクト n 次元 多様体 (境界を持っても良い) とする．$\mathcal{H}(M)$ は M の同相群 (Whitney 位相) を表す．各 $h \in \mathcal{H}(M)$ は次の形の基本近傍系を持つ:

$$\mathcal{U}(h) = \big\{g \in \mathcal{H}(M) : (h, g) \prec \mathcal{U}\big\} \quad (\mathcal{U} \in \mathrm{cov}(M))$$

但し, $\mathrm{cov}(M)$ は M の開被覆全体の族を表す．$\mathcal{H}(M)$ は位相群を成す．$\mathcal{H}(M)_0$ は $\mathcal{H}(M)$ における id_M の連結成分を表し，$\mathcal{H}_c(M)$ はコンパクト台を持つ M の同相写像全体の成す $\mathcal{H}(M)$ の部分群を表す．$\mathcal{H}_c(M)$ の任意のコンパクト部分集合 $\mathcal{K}$ は 共通のコンパクト台を持つ，すなわち，M のあるコンパクト部分集合 K があって，任意の $h \in \mathcal{K}$ に対して $\mathrm{supp}\, h \subset K$ となる．

M が n 次元 PL 多様体 (境界を持っても良い) のときには，M の PL 同相群 $\mathcal{H}^{\mathrm{PL}}(M)$, すなわち，$M$ の PL 同相写像全体の成す $\mathcal{H}(M)$ の部分群 を考える事が出来る．

2.1. M **がコンパクトの場合**.

M がコンパクトの場合，Whitney 位相はコンパクト-開位相と一致し，$\mathcal{H}(M)$ は可分完備距離化可能で局所可縮である ([6], [7])．さらに，次が予想されている．

同相群予想. $\mathcal{H}(M)$ は l_2-多様体になる．

この予想は，$\mathcal{H}(M)$ が ANR であるという主張と同値であり ([16])，$n = 1, 2$ のとき成り立つ事が知られているが ([12])，$n \geq 3$ のときは，未解決のままである．

M が コンパクト n 次元 PL 多様体 のとき，M の PL 同相群 $\mathcal{H}^{\mathrm{PL}}(M)$ は l_2^f-多様体になる事が知られている．また，$n = 1, 2$ のときには $\mathcal{H}^{\mathrm{PL}}(M)$ は $\mathcal{H}(M)$ においてホモトピー稠密になり，$n \geq 3$ のときには 包含写像 $\mathcal{H}^{\mathrm{PL}}(M)_0 \subset \mathcal{H}(M)_0$ が弱ホモトピー同値である事が知られている ([8])．同相群予想が肯定的に解決されれば，$n \geq 3$ のときでも $\mathcal{H}^{\mathrm{PL}}(M)_0$ が $\mathcal{H}(M)_0$ においてホモトピー稠密になることがわかる．

2.2. M **が非コンパクトの場合**.

命題 3. (1) $\mathcal{H}_c(M)$ はパラコンパクトで局所可縮である．

(2) $\mathcal{H}(M)_0$ は $\mathcal{H}_c(M)$ の開正規部分群であり，$\mathcal{H}(M)_0$ は「$h \in \mathcal{H}(M)$ で id_M とコンパクト台を持つイソトピーで結べるもの全体」と一致する．

(3) 写像類群 $\mathcal{M}_c(M) = \mathcal{H}_c(M)/\mathcal{H}(M)_0$ (離散位相) を考えると，位相空間として $\mathcal{H}_c(M) \approx \mathcal{H}(M)_0 \times \mathcal{M}_c(M)$ となる．

(4) $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は M のコンパクト部分集合の列で次を満たすとする:

$$M_i \subset \mathrm{Int}_M M_{i+1}, \quad M = \cup_i M_i.$$

$G(M_i) = \{h \in \mathcal{H}_c(M) \mid \mathrm{supp}\, h \subset M_i\}$ と置くと，積写像 $p : \boxdot_i G(M_i) \to \mathcal{H}_c(M)$ が定まる．このとき p は局所セクションを持つ．特に $\mathcal{H}_c(M) = \text{g-}\varinjlim_i G(M_i)$ となる．

次に，$(\mathcal{H}(M), \mathcal{H}_c(M))$ の局所位相型について考察する．論文 [1] において $(\mathcal{H}(\mathbb{R}), \mathcal{H}_c(\mathbb{R})) \approx (\square^\omega, \boxdot^\omega)\, l_2$ が示されている．従って，一般の非コンパクト多様体 M の同相群 $(\mathcal{H}(M), \mathcal{H}_c(M))$ の局所位相型のモデルとして $(\square^\omega, \boxdot^\omega)\, l_2$ を取るのは自然である．本論説では，空間の組の局所同相を次で定義する:

(1) $(X, A) \approx_\ell (Y, B)$ at $a \in A \iff X$ における点 a の開近傍 U と Y の開集合 V が存在して，$(U, U \cap A) \approx (V, V \cap B)$.

(2) $(X, A) \approx_\ell (Y, B) \iff$ 各 $a \in A$ に対して $(X, A) \approx_\ell (Y, B)$ at $a \in A$.

予想 1. $(\mathcal{H}(M), \mathcal{H}_c(M)) \approx_\ell (\square^\omega, \boxdot^\omega)\, l_2$.

定理 1. $n = 1, 2$ のとき予想は成り立つ．

$\boxdot^\omega\, l_2 \approx l_2 \times \mathbb{R}^\infty$ だから，$n = 1, 2$ のとき $\mathcal{H}_c(M)$ は，パラコンパクト $(l_2 \times \mathbb{R}^\infty)$-多様体になる．$n \geq 3$ の場合，予想は未解決である．

PL 同相群に関しては，次がわかる．

命題 4. M が n 次元 PL 多様体で $n = 1, 2$ のとき，$\mathcal{H}_c^{\mathrm{PL}}(M)$ は $\mathcal{H}_c(M)$ においてホモトピー稠密になる．

$n = 2$ の場合の $\mathcal{H}_c(M)$ の位相型に関しては，プレプリント [3] において次の結論を得ている．

定理 2. $n = 2$ のとき

(1) $\mathcal{H}(M)_0 \approx \boxdot^\omega l_2 \approx l_2 \times \mathbb{R}^\infty$;

(2) $\mathcal{H}_c(M) \approx \mathcal{H}(M)_0 \times \mathcal{M}_c(M), \quad \mathcal{M}_c(M) \approx \begin{cases} \text{加算離散空間} & (M：\text{一般型}) \\ \text{一点} & (M：\text{例外型}). \end{cases}$

ここで，M が例外型であるとは，M が次の形をしていることを意味する:

$M \approx X - K$, 但し X は アニュラス, 円板 又は メービウスの帯;
K は X の一つの境界円の空でないコンパクト部分集合.

3. Whitney C^∞ 位相をもつ微分同相群

M を 連結 σ-コンパクト C^∞ n 次元多様体で境界を持たないとする．$\mathcal{D}(M)$ は M の微分同相群 (Whitney C^∞-位相) を表す．各 $h \in \mathcal{D}(M)$ は，次の形の基本近傍系を持つ:

$$\textstyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}(h,\, (U_\lambda, x_\lambda),\, (V_\lambda, y_\lambda),\, K_\lambda,\, r_\lambda,\, \varepsilon_\lambda)$$

但し $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は M で局所有限である．コンパクト - 開 C^∞ 位相の場合には，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は有限に取る．

$\mathcal{D}(M)_0$ は $\mathcal{D}(M)$ における id_M の連結成分を表し，$\mathcal{D}_c(M)$ は M のコンパクト台を持つ微分同相写像 全体の成す $\mathcal{D}(M)$ の部分群を表す．

3.1. M **がコンパクトの場合.**

この場合には，Whitney C^∞ 位相はコンパクト - 開 C^∞ 位相と一致し，$\mathcal{D}(M)$ は 可分完備距離化可能であり，滑らかな Fréchet 多様体 (cf. [11, 10])，従って位相的 l_2-多様体になることが知られている.

3.2. M **が非コンパクトの場合.**

定理 3. $(\mathcal{D}(M), \mathcal{D}_c(M)) \approx_\ell (\square^\omega, \boxdot^\omega)\, l_2$. 特に，$\mathcal{D}_c(M)$ はパラコンパクト $(l_2 \times \mathbb{R}^\infty)$-多様体になる.

論文 [4] において, $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_c(\mathbb{R})) \approx (\square^\omega, \boxdot^\omega)\, l_2$ が示されている.

命題 5. (1) $\mathcal{D}(M)_0$ は $\mathcal{D}_c(M)$ の開正規部分群であり，$\mathcal{D}(M)_0$ は「$h \in \mathcal{D}(M)$ で id_M とコンパクト台を持つイソトピーで結べるもの全体」と一致する.

(2) 写像類群 $\mathcal{M}_c^\infty(M) = \mathcal{D}_c(M)/\mathcal{D}(M)_0$ (離散位相) を考えると，位相空間として $\mathcal{D}_c(M) \approx \mathcal{D}(M)_0 \times \mathcal{M}_c^\infty(M)$ となる.

(3) $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は M のコンパクト C^∞ n 次元部分多様体の列で，次を満たすとする.

$$M_i \subset \mathrm{Int}_M M_{i+1}, \quad M = \cup_i M_i.$$

$G(M_i) = \{h \in \mathcal{D}_c(M) \mid \mathrm{supp}\, h \subset M_i\}$ と置くと，積写像 $p : \boxdot_i G(M_i) \to \mathcal{D}_c(M)$ が定まる．このとき p は局所セクションを持つ．特に $\mathcal{D}_c(M) = \text{g-}\varinjlim_i G(M_i)$ となる.

$\mathcal{D}_c(M)$ の位相型に関しては，プレプリント [5] において次の結論を得ている.

定理 4. (1) $n = 1, 2$ のとき，$\mathcal{D}(M)_0 \approx l_2 \times \mathbb{R}^\infty$.

(2) $n = 3$ で M が 向き付け可能 かつ 既約 (M の中の任意の球面が M の中で 3 次元球体を囲んでいる) のとき，$\mathcal{D}(M)_0 \approx l_2 \times \mathbb{R}^\infty$.

(3) X が空でない境界を持つ コンパクト連結 C^∞ n 次元多様体で $M = \mathrm{Int}\, X$ のとき，$\mathcal{D}(M)_0 \approx \mathcal{D}(X, \partial X)_0 \times \mathbb{R}^\infty$.

4. 証明のアイディア — 微分同相群の場合

最後に，主要結果の証明に関して概説する．第 2 節，第 3 節を見て気付いたと思うが，主要な結果は，群 $\mathcal{H}(M)$ と $\mathcal{D}(M)$ に関して並列になっている．実際，これらは同じ議論から従う結果である．論文 [2] では, 群 $\mathcal{H}(M)$, $\mathcal{D}(M)$ が M 上の変換群として捉えられることに着目して，すべての議論を M 上の一般の変換群 G に関して定式化し，Whitney 位相に対応する "強位相" に関して，適当な付加条件の下で証明している．従って，第 2 節, 第 3 節の結果は，この一般的な結果の特別な場合として得られる事になる．我々は，この一般的な結果・議論が $\mathcal{H}(M)$, $\mathcal{D}(M)$ の適当な部分群に関しても適応出来る事を期待している (cf. [17]).

以下では，微分同相群 $\mathcal{D}(M)$ に関する 定理 3 及び 命題 5 (3) の証明に関して，その要点を述べる．

M を 非コンパクト C^∞ n 次元多様体とし境界は持たないとする．記号を簡略化し，さらに変換群への議論の一般化を示唆するため，$(G, G_c) = (\mathcal{D}(M), \mathcal{D}_c(M))$ と置く．M の部分集合 K, N に対して, 次の記号を用いる:

$$G_K = \{g \in G \mid g|_K = \mathrm{id}_K\}, \quad G(N) = G_{M \setminus N}, \quad G_K(N) = G_K \cap G(N), \quad G_{K,c} = G_K \cap G_c.$$

埋め込み空間に関して，M の C^∞ 部分多様体 L に対して

$$\mathcal{E}^G(L, M) = \{g|_L \mid g \in G\} \quad (\text{コンパクト - 開 } C^\infty \text{ 位相})$$

と置く．包含写像 $i_L : L \subset M$ を基点にとる．

M の コンパクト C^∞ n 次元部分多様体の列 $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ で，$M_i \subset \mathrm{Int}_M M_{i+1}$，$M = \cup_i M_i$ を満たすものを考える．$L_i := M_i - \mathrm{Int}_M M_{i-1}$ $(M_0 = \emptyset)$ と置く．$(G(M_i))_i$ は G_c の閉部分群の増加列を定め，積写像 $p : \boxdot_i G(M_i) \to G_c$ が定まる．

命題 6. (1) $(G, G_c) \approx_\ell (\square, \boxdot)_i\, \mathcal{E}^G(L_{2i}, M) \times (\square, \boxdot)_i\, G(L_{2i-1})$ at id_M.

(2) $p : \boxdot_i G(M_i) \to G_c$ は局所セクションを持つ．

各空間 $\mathcal{E}^G(L_{2i}, M)$, $G(L_{2i-1})$ は l_2 と局所同相だから, 定理 3 の結論 $(G, G_c) \approx_\ell (\square, \boxdot)^\omega\, l_2$ が従う．

命題 6 の証明．

(1) M のコンパクト C^∞ n 次元部分多様体 N_{2i} で L_{2i} の小さな近傍 となっているものをとる．列 $\mathcal{L} = (L_{2i})_i$, $\mathcal{K} = (L_{2i-1})_i$, $\mathcal{N} = (N_{2i})_i$ は，M のコンパクト C^∞ n 次元部分多様体からなる離散列である．$L = \cup_i L_{2i}$, $K = \cup_i L_{2i-1}$, $N = \cup_i N_{2i}$ と置く．

(2) 写像 $r_\mathcal{L}$, $\lambda_\mathcal{N}$, $\lambda_\mathcal{K}$ を次の様に定める:

(i) $r_\mathcal{L} : G \to \square_i\, \mathcal{E}^G(L_{2i}, M)$, $r_\mathcal{L}(g) = (g|_{L_{2i}})_i$.

(ii) $\lambda_\mathcal{N} : \square_i G(N_{2i}) \to G(N)$, $\lambda_\mathcal{K} : \square_i G(L_{2i-1}) \to G(K) = G_L$:
$\lambda_\mathcal{N}$ は $g = (g_{2i})_i \in \square_i G(N_{2i})$ に対して $\lambda_\mathcal{N}(g) = g_{2i}$ on N_{2i} により定義される．
$\lambda_\mathcal{K}$ も同様に定義される．

写像 $\lambda_\mathcal{N}$, $\lambda_\mathcal{K}$ は開埋め込みとなる．

(3) 写像 $\eta : \mathcal{V} \to G(N)$ を次の 3 つの写像の合成として定める:

$$\eta :\ \mathcal{V} \xrightarrow{r_\mathcal{L}|_\mathcal{V}} \square_i\, \mathcal{V}_i \xrightarrow{s} \square_i\, G(N_{2i}) \xrightarrow{\lambda_\mathcal{N}} G(N).$$

但し, $\mathcal{V}$ は G における id_M の開近傍で，写像 s と共に次で定義される：

(i) 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して，制限写像 $G \to \mathcal{E}^G(L_{2i}, M)$ は，包含写像 $i_{L_{2i}}$ において局所セクション $s_i : \mathcal{V}_i \to G(N_{2i})$ で $s_i(i_{L_{2i}}) = \mathrm{id}_M$ となるものを持つ (cf. [10, 14, 15])．写像 s を次式で定める：

$$s = \square_i s_i : \square_i\, \mathcal{V}_i \to \square_i G(N_{2i}), \quad s((f_i)_i) = (s_i(f_i))_i.$$

(ii) $\mathcal{V}$ は，写像 $r_{\mathcal{L}}: G \to \Box_i \mathcal{E}^G(L_{2i}, M)$ による逆像 $\mathcal{V} = r_{\mathcal{L}}^{-1}(\Box_i \mathcal{V}_i)$ として定める．

(4) 写像 φ を次式で定める:

$$\varphi: \mathcal{V} \to \Box_i \mathcal{V}_i \times G_L, \quad \varphi(g) = (r_{\mathcal{L}}(g), \eta(g)^{-1} g).$$

この写像は well-defined であり，次の 組の同相写像 を与える:

$$\varphi: (\mathcal{V}, \mathcal{V} \cap G_c) \approx (\Box, \boxdot)_i \mathcal{V}_i \times (G_L, G_{L,c}).$$

(5) 命題 6 (1) の局所同相は，次の局所同相の合成として得られる:

$$(G, G_c) \overset{\varphi}{\approx_\ell} (\Box, \boxdot)_i \, \mathcal{E}^G(L_{2i}, M) \times (G_L, G_{L,c}) \overset{\mathrm{id} \times \lambda_{\mathcal{K}}^{-1}}{\approx_\ell} (\Box, \boxdot)_i \, \mathcal{E}^G(L_{2i}, M) \times (\Box, \boxdot)_i \, G(L_{2i-1})$$

(6) 積写像 p の局所セクションを構成するために，まず次の写像 ρ が局所セクションを持つことを示す:

$$\rho: \boxdot_{i \in \mathbb{N}} G(N_{2i}) \times \boxdot_{i \in \mathbb{N}} G(L_{2i-1}) \longrightarrow G_c, \quad \rho((f_i)_{i \in \mathbb{N}}, (g_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \lambda_{\mathcal{N}}((f_i)_{i \in \mathbb{N}}) \lambda_{\mathcal{K}}((g_i)_{i \in \mathbb{N}})$$

写像 ρ は次の分解を持つ:

$$\rho: \boxdot_{i \in \mathbb{N}} G(N_{2i}) \times \boxdot_{i \in \mathbb{N}} G_L(L_{2i-1}) \xrightarrow{\mathrm{id} \times \lambda_{\mathcal{K}}} \boxdot_{i \in \mathbb{N}} G(N_{2i}) \times G_{L,c} \xrightarrow{\theta} G_c$$

写像 θ は，id_M において次の局所セクションを持つ:

$$\sigma_0 = (s \times \mathrm{id})\varphi: \mathcal{V} \cap G_c \longrightarrow \boxdot_{i \in \mathbb{N}} G(N_{2i}) \times G_{L,c}.$$

$\mathrm{id} \times \lambda_{\mathcal{K}}$ は開埋め込みであり，その像は $\sigma_0(\mathrm{id}_M)$ を含むので，$\mathcal{V} \cap G_c$ における id_M の十分小さな近傍 $\mathcal{U}$ を選べば，

$$\sigma = (\mathrm{id} \times \lambda_{\mathcal{K}})^{-1} \, \sigma_0|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \longrightarrow \boxdot_{i \in \mathbb{N}} G(N_{2i}) \times \boxdot_{i \in \mathbb{N}} G_L(L_{2i-1})$$

は，ρ の id_M における局所セクションを与える．

(7) 局所セクション σ は次の性質を持つ:

$\sigma(h) = ((f_i)_{i \in \mathbb{N}}, (g_i)_{i \in \mathbb{N}})$ $(h \in \mathcal{U})$ と置くとき，

(i) $h = \lambda_{\mathcal{N}}((f_i)_{i \in \mathbb{N}}) \, \lambda_{\mathcal{K}}((g_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (f_1 f_2 \cdots)(g_1 g_2 \cdots) = f_1 g_1 f_2 g_2 f_3 g_3 \cdots;$

(ii) $f_i \in G(N_{2i}) \subset G(M_{2i+1}), \quad g_i \in G(L_{2i-1}) \subset G(M_{2i-1}) \subset G(M_{2i+2}) \quad (i \in \mathbb{N});$

(iii) $\big(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M, f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots\big) \in \boxdot_{i \in \mathbb{N}} G(M_i), \quad h = p\big(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M, f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots\big).$

(8) 最後に，積写像 p の id_M における局所セクション s が次式で定義される：

$$s: \mathcal{U} \longrightarrow \boxdot_{i \in \mathbb{N}} G(M_i), \quad s(h) = \big(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M, f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots\big).$$

References

[1] T. Banakh, K. Mine and K. Sakai, *Classifying homeomorphism groups of infinite graphs*, Topology Appl. **157** (2009), 108–122.

[2] T. Banakh, K. Mine, K. Sakai, T. Yagasaki, Homeomorphism and diffeomorphism groups of non-compact manifolds with the Whitney topology, Topology Proceedings, **37** (2011) 61 - 93 (e-published in April 30, 2010).

[3] T. Banakh, K. Mine, K. Sakai, T. Yagasaki, *On homeomorphism groups of non-compact surfaces, endowed with the Whitney topology*, preprint (arXiv:1004.3015).

[4] T. Banakh and T. Yagasaki, *The diffeomorphism groups of the real line are pairwise bihomeomorphic*, in: Proceedings of "Infinite-Dimensional Analysis and Topology, 2009", Special issue in Topology **48** (2009) 119 - 129.

[5] T. Banakh and T. Yagasaki, *Diffeomorphism groups of non-compact manifolds endowed with the Whitney C^∞-topology*, preprint (arXiv:1005.1789).

[6] A. V. Černavskiĭ, *Local contractibility of the group of homeomorphisms of a manifold*, (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **79 (121)** (1969), 307–356.

[7] R. D. Edward and R. C. Kirby, *Deformations of spaces imbeddings*, Ann. of Math. **93** (1971), 63–88.

[8] R. Geoghegan and W. E. Haver, *On the space of piecewise linear homeomorphisms of a manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), 145–151.

[9] I. I. Guran and M. M. Zarichnyi, *The Whitney topology and box products*, Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A. 1984, no.**11**, 5–7.

[10] R. S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7**:1 (1982), 65–222.

[11] J. A. Leslie, *On a differential structure for the group of diffeomorphisms*, Topology **6** (1967), 263–271.

[12] R. Luke and W. K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 275–285.

[13] P. Mankiewicz, *On topological, Lipschitz, and uniform classification of LF-spaces*, Studia Math. **52** (1974), 109–142.

[14] R. S. Palais, *Local triviality of the restriction map for embeddings*, Comment. Math. Helv. **34** (1960), 305–312.

[15] R. T. Seeley, *Extension of C^∞ functions defined in a half space*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 625–626.

[16] H. Toruńczyk, *Charactering Hilbert space topology*, Fund. Math. **111** (1981), 247–262.

[17] T. Yagasaki, *Weak extension theorem for measure-preserving homeomorphisms of noncompact manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **61** (2009) 687 - 721.

Tatsuhiko Yagasaki

Graduate School of Science and Technology,
Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyoku, Kyoto 606-8585, Japan

yagasaki@kit.ac.jp